Chapitre 14

Espaces vectoriels

Objectifs

- Rappeler la définition d'espace vectoriel et les exemples de référence.
- Définir la notion d'application linéaire, le vocabulaire lié à cette notion et les propriétés.
- Définir la notion de sous-espace vectoriel, la notion d'équation linéaire, la notion de sous-espace engendré par une famille de vecteurs.
- Définir et étudier la somme de deux sous-espaces vectoriels.
- Étudier deux exemples d'endomorphismes particulièrement importants : les projections et les symétries.

Sommaire

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I) Rappels

1) definition

Soit E un ensemble non vide, on dit que E est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel (ou $\mathbb{K}$-e.v.) lorsque E possède une addition et un produit par les scalaires (loi de composition externe, notée « . », c'est une application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$), avec les propriétés suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien (l'élément neutre est noté 0_E ou $\overrightarrow{0_E}$ et appelé **vecteur nul** de E).
- La loi . (ou produit par les scalaires) doit vérifier : $\forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{K}, \forall\ x,y\in E$:
  - $1.x = x$

- $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{K}$ - e.v., les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **les scalaires** et les éléments de E sont appelés **vecteurs** (parfois notés avec une flèche).

2) Exemples de référence

- Un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-e.v., $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. Plus généralement si $\mathbb{K}$ est corps inclus dans un autre corps $\mathbb{L}$, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-e.v..
- L'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni des opérations suivantes :

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \text{ et } \lambda.(x_1,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n),$$

  est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul est le n-uplet : $(0,\dots,0)$.
- Si I est un ensemble non vide, alors l'ensemble des applications de I vers $\mathbb{K}$: $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$, pour les opérations usuelles (addition de deux fonctions et produit par un scalaire) est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant l'application nulle. En particulier $(\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K}),+,.)$ sont des $\mathbb{K}$-e.v., ainsi que l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  Plus généralement, si E est un $\mathbb{K}$-e.v., l'ensemble des applications de I vers E : $\mathscr{F}(I,E)$, pour les opérations usuelles sur les fonctions, est un $\mathbb{K}$-e.v..
- Espace produit : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., on définit sur $E\times F$ l'addition : $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, et un produit par les scalaires : $\lambda.(x,y) = (\lambda.x,\lambda.y)$. On peut vérifier alors que $(E\times F,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., le vecteur nul étant $(0_E,0_F)$.

3) Règles de calculs

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. :
- $\forall\ \overrightarrow{x}\in E, 0.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, et $\forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
- $\forall\ \overrightarrow{x}\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, -(\lambda.\overrightarrow{x}) = (-\lambda).\overrightarrow{x} = \lambda.(-\overrightarrow{x})$.
- $\forall\ \overrightarrow{x}\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, \lambda.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda = 0$ ou $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

II) Applications linéaires

1) Définition



DÉFINITION 14.1 (application linéaire ou morphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. et soit $f: E\to F$ une application, on dit que f est une application linéaire lorsque :

$$\forall\ x,y\in E, \forall\ \lambda\in\mathbb{K}, f(x+y) = f(x)+f(y) \text{ et } f(\lambda.x) = \lambda.f(x).$$

Si de plus, f est bijective, alors on dit que f est un isomorphisme (d'espaces vectoriels). L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathscr{L}(E,F)$.

Remarques :
- Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupes additifs, donc si $f\in\mathscr{L}(E,F)$ alors : $f(0_E) = 0_F$ et $\forall\ x\in E, f(-x) = -f(x)$. De plus on peut parler du noyau de f : $\ker(f) = \{x\in E \mid f(x) = 0_F\}$, et f est injective ssi $\ker(f) = \{0_E\}$.
- L'application nulle (notée 0) de E vers F est linéaire.
- L'application identité de E : $\mathrm{id}_E : E\to E$ définie par $\mathrm{id}_E(x) = x$, est linéaire bijective (et $(\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{id}_E$).
- Soit $\lambda\in\mathbb{K}^*$, l'homothétie de rapport λ : $h_\lambda : E\to E$, définie par $h_\lambda(x) = \lambda.x$, est linéaire et bijective. Sa réciproque est l'homothétie de rapport $1/\lambda$.



DÉFINITION 14.2 (vocabulaire)

- *Une application linéaire de* E *vers* E *est appelée un endomorphisme de* E*. L'ensemble des endomorphismes de* E *est noté* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *(on a donc* $\mathscr{L}(\mathrm{E}) = \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$*).*
- *Un isomorphisme de* E *vers* E *est appelé un automorphisme de* E*. L'ensemble des automorphismes de* E *est noté* GL(E) *et appelé groupe linéaire de* E*.*
- *Une application linéaire de* E *vers* $\mathbb{K}$ *est appelée une forme linéaire sur* E*. L'ensemble des formes linéaires sur* E *est noté* E^* *et appelé dual de* E *(on a donc* $\mathrm{E}^* = \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$*).*

2) Propriétés

- La composée de deux applications linéaires est linéaire. On en déduit que GL(E) est stable pour la loi $\circ$.
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{E})$. On en déduit que GL(E) est stable par symétrisation, *i.e.* si $f \in \mathrm{GL(E)}$, alors $f^{-1} \in \mathrm{GL(E)}$.
- $(\mathrm{GL(E)},\circ)$ est un groupe (non abélien en général), c'est en fait un sous-groupe du groupe des permutations de E : $(\mathrm{S_E},\circ)$.
- $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est injective ssi $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$.
- Si $f, g \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f+g \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\lambda.f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On en déduit que $(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (inclus dans $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$).
- $(\mathscr{L}(\mathrm{E}),+,\circ)$ est un anneau, la loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication.

Remarques :

- En général, l'anneau $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ n'est pas commutatif. Le groupe des inversibles de cet anneau est GL(E).
- La loi $\circ$ jouant le rôle d'une multiplication, on adopte les notations usuelles des anneaux pour les puissances, de plus si $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ commutent (*i.e.* $u \circ v = v \circ u$), alors on peut utiliser le binôme de *Newton* : $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\, u^k \circ v^{n-k}$.
- $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ n'est pas un anneau intègre.

III) Sous-espaces vectoriels

1) definition



DÉFINITION 14.3

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v. et soit* H *un ensemble, on dit que* H *est un sous-espace vectoriel de* E *(ou s.e.v de* E*) lorsque :*

- $\mathrm{H} \subset \mathrm{E}$, $\mathrm{H} \neq \emptyset$.
- $\forall\, x, y \in \mathrm{H}, x+y \in \mathrm{H}$ *(*H *est stable pour l'addition).*
- $\forall\, x \in \mathrm{H}, \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in \mathrm{H}$ *(*H *est stable pour la loi .).*

Si c'est le cas, alors il est facile de vérifier que $(\mathrm{H},+,.)$ *est lui-même un* $\mathbb{K}$*-e.v.*



THÉORÈME 14.1 (noyau et image d'une application linéaire)

Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *alors* $\ker(f)$ *est un s.e.v de* E *et* $\mathrm{Im}(f)$ *est un s.e.v de* F*.*

Remarque : Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ alors f est un isomorphisme ssi $\ker(f) = \{0_\mathrm{E}\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$.




THÉORÈME 14.2 (image d'un s.e.v par une application linéaire)

Soit H *un s.e.v de* E *et* $f \in \mathscr{L}(E,F)$*, alors* $f < H >$ *(ensemble des images par* f *des éléments de* H*) est un s.e.v de* F.




THÉORÈME 14.3 (image réciproque d'un s.e.v par une application linéaire)

Soit H *un s.e.v de* F *et soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *alors* $f^{-1} < H >$ *(ensemble des antécédents des éléments de* H *par* f*) est un s.e.v de* E.




THÉORÈME 14.4 (intersection de sous-espaces vectoriels)

Soit $(H_i)_{i\in I}$ *une famille de s.e.v de* E *(*I *est un ensemble d'indices), alors* $\bigcap_{i\in I} H_i$ *est un s.e.v de* E.



DÉFINITION 14.4 (hyperplan)

Soit H *un s.e.v de* E*, on dit que* H *est un hyperplan de* E *lorsqu'il existe une forme linéaire* ϕ *sur* E*, non identiquement nulle, telle que* $H = \ker(\phi)$.

2) Équations linéaires



DÉFINITION 14.5

Une équation linéaire est une équation du type : $u(x) = b$ *avec* $u \in \mathscr{L}(E,F), b \in F$ *et* $x \in E$ *(inconnue).*
L'équation $u(x) = 0_F$ *est appelée équation homogène associée.*




THÉORÈME 14.5 (structure des solutions d'une équation linéaire)

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ *et soit* $b \in F$*, l'équation linéaire* $u(x) = b$ *avec* $x \in E$ *a des solutions ssi* $b \in \mathrm{Im}(u)$*. Si c'est le cas, et si* $x_0 \in E$ *désigne une solution particulière (i.e.* $u(x_0) = b$*), alors l'ensemble de toutes les solutions est :*

$$S = \{y + x_0 \ / \ y \in \ker(u)\} = x_0 + \ker(u).$$

3) Sous-espace engendré



DÉFINITION 14.6 (combinaisons linéaires)

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v et soit* $x_1, \ldots, x_n$ *des vecteurs de* E*. On appelle combinaison linéaire de la famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$*, tout vecteur* x *de* E *pour lequel il existe des scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que :*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *est noté* $\mathrm{Vect}[x_1, \ldots, x_n]$.
Deux vecteurs x *et* y *de* E *sont dits colinéaires lorsque l'un des deux est combinaison linéaire de l'autre, i.e.* $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}, x = \lambda y$ *ou* $y = \lambda x$.


THÉORÈME 14.6 (image d'une combinaison linéaire par une application linéaire)
Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v et soit* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille de vecteurs de* E*. Soit* $f \in \mathscr{L}(E,F)$*, alors l'image par* f *d'une combinaison linéaire de la famille* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et une combinaison linéaire de la famille* $(f(x_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ *(dans* F*) avec les mêmes coefficients.*


THÉORÈME 14.7 (sous-espace engendré)
Soit $(x_1,\dots,x_n)$ *une famille de vecteurs de* E*, l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille :* $\mathrm{Vect}[x_1,\dots,x_n]$ *est un s.e.v de* E*. C'est même le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v de* E *qui contient tous les vecteurs de cette famille. On l'appelle s.e.v engendré par* $(x_1,\dots,x_n)$*.*

4) Somme de deux sous-espaces vectoriels


DÉFINITION 14.7 (somme de deux s.e.v)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E*, on appelle somme de* F *et* G *l'ensemble noté* F + G *et défini par :*

$$F+G=\{x\in E\ /\ \exists\ u\in F, v\in G, x=u+v\}.$$


THÉORÈME 14.8
La somme de deux s.e.v de E *est un s.e.v de* E*.*


DÉFINITION 14.8 (somme directe)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E*, on dit que la somme* F + G *est directe lorsque* $F\cap G=\{0_E\}$*. Si c'est le cas on note* $F\oplus G$ *au lieu de* F + G*.*


THÉORÈME 14.9 (caractérisation des sommes directes)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E*, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) F *et* G *sont en somme directe.*

b) $\forall\ z\in F+G, \exists\ x\in F, y\in G$, ***uniques***, $z=x+y$ *(i.e. tout vecteur de* F + G *s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G*).*

c) $\forall\ x,\in F, y\in G$, *si* $x+y=0_E$ *alors* $x=y=0_E$.

d) L'application linéaire $\phi : F\times G\to E$ *définie par* $\phi(x,y)=x+y$ *est injective.*


DÉFINITION 14.9 (s.e.v supplémentaires)
Soient F *et* G *deux s.e.v de* E *, on dit que* F *et* G *sont supplémentaires lorsque* $F\oplus G=E$*. Ce qui signifie que* E = F + G *et la somme* F + G *est directe, ou encore : tout vecteur de* E *s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G*.*



THÉORÈME 14.10 (caractérisations des hyperplans)

Soit H *un s.e.v de* E, *les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) H *est un hyperplan de* E *(i.e. le noyau d'une forme linéaire sur* E *non nulle).*

b) $\exists\, x_0 \in \mathrm{E}\setminus\mathrm{H}$ *tel que* $\mathrm{H}\oplus\mathrm{Vect}[x_0]=\mathrm{E}$.

c) $\forall\, x_0 \in \mathrm{E}\setminus\mathrm{H}, \mathrm{H}\oplus\mathrm{Vect}[x_0]=\mathrm{E}$.

IV) Projections, symétries

1) Projecteurs



DÉFINITION 14.10

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v, une projection dans* E *(ou un projecteur de* E*) est un endomorphisme* p *de* E *tel que* $p^2 = p$ *(i.e.* $p\circ p = p$*).*

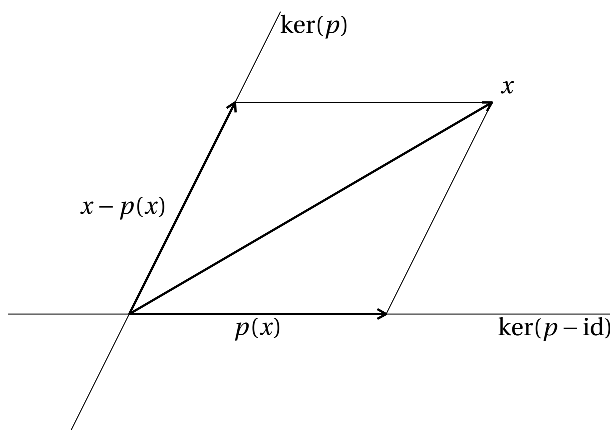


THÉORÈME 14.11 (caractérisation des projections)

$p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *est un projecteur ssi :* $\mathrm{E} = \ker(p)\oplus\ker(p-\mathrm{id}_\mathrm{E})$. *Si c'est le cas, on a* $\mathrm{Im}(p) = \ker(p-\mathrm{id}_\mathrm{E})$ *et on dit que* p *est la projection sur* $\mathrm{Im}(p)$ *parallèlement à* $\ker(p)$. *Tout vecteur* x *de* E *se décompose de la manière suivante :*

$$x = (x - p(x)) + p(x).$$

On retiendra la figure suivante pour schématiser une projection p :





THÉORÈME 14.12 (projection associée à une décomposition)

Si F *et* G *sont deux s.e.v de* E *supplémentaires (*$\mathrm{E} = \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$*), alors il existe une unique projection* p *telle que* $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{F}$ *et* $\ker(p) = \mathrm{G}$, *i.e. qui soit la projection sur* F *parallèlement à* G.

2) Symétries



DÉFINITION 14.11

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-e.v, une symétrie de* E *est un endomorphisme* s *tel que* $s^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ *(involution linéaire).*

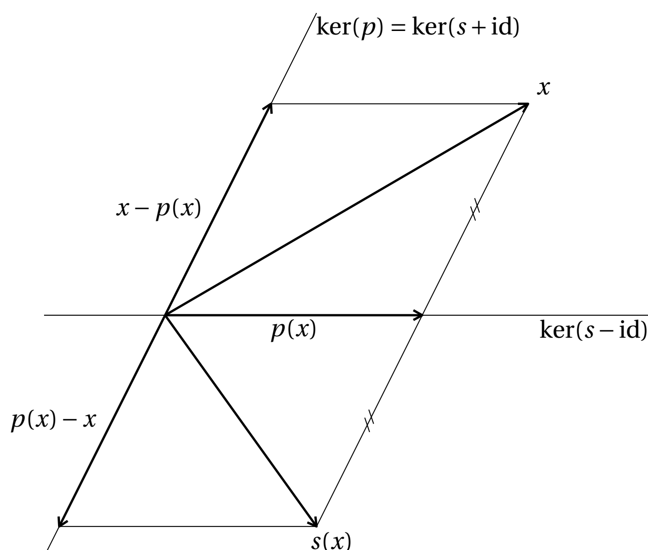


THÉORÈME 14.13 (caractérisation des symétries)

Soit $s \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, s *est une symétrie ssi* $\mathrm{E} = \ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$. *Ce qui revient à dire que l'application* $p = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_\mathrm{E} + s)$ *est une projection. Si c'est le cas, on dit que* s *est la symétrie par rapport à* $\ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E})$ *(ensemble des invariants) et parallèlement à* $\ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E})$, *et on dit que* p *est la projection associée à* s. *Tout vecteur* x *de* E *se décompose de la manière suivante :*

$$x = \frac{1}{2}(s(x) + x) + \frac{1}{2}(x - s(x)).$$

On retiendra la figure suivante pour schématiser une symétrie :





THÉORÈME 14.14 (symétrie associée à une décomposition)

Si F *et* G *sont deux s.e.v de* E *supplémentaires* ($\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$), *alors il existe une unique symétrie* s *telle que* $\ker(s - \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{F}$ *et* $\ker(s + \mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{G}$, *i.e. qui soit la symétrie par rapport à* F *et parallèlement à* G.

V) Exercices

★ Exercice 14.1

Dans les cas suivants, dire si F est un s.e.v de E :

a) $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (T > 0 est fixé) :

i) $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \ / \ f(1) - f(0) = 0\}$ ii) $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \ / \ f(1) = 2f(0)\}$

iii) $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \ / \ \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x+\mathrm{T}) = f(x)\}$ iv) $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \ / \ \lim\limits_{\pm\infty} f = 0\}$

v) $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E} \ / \ f$ est croissante$\}$.

b) $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n, \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$:

i) $\mathrm{F} = \{\vec{x} \in \mathrm{E} \ / \ x_1 = x_2 = 0\}$. ii) $\mathrm{F} = \{\vec{x} \in \mathrm{E} \ / \ x_1 + x_2 = 0\}$.

iii) $\mathrm{F} = \{\vec{x} \in \mathrm{E} \ / \ x_1 \neq 0\}$. iv) $\mathrm{F} = \{\vec{x} \in \mathrm{E} \ / \ x_1 = 0$ ou $x_2 = 0\}$.

v) $\mathrm{F} = \{\vec{x} \in \mathrm{E} \ / \ x_1 = x_2\}$. vi) $\mathrm{F} = \{\vec{x} \in \mathrm{E} \ / \ x_1^2 + x_2^3 = 0\}$.

c) $\mathrm{E} = \mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$:

i) $\mathrm{F} = \{u \in \mathrm{E} \ / \ \lim u_n = 0\}$. ii) $\mathrm{F} = \{u \in \mathrm{E} \ / \ (u_n)$ est convergente$\}$.

iii) $\mathrm{F} = \{u \in \mathrm{E} \ / \ (u_n)$ est bornée$\}$. iv) $\mathrm{F} = \{u \in \mathrm{E} \ / \ (u_n)$ est périodique$\}$.

★ Exercice 14.2

Soit $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ définie par $f(x, y) = (-x + y, -y)$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$, déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b) Montrer que $f + \mathrm{id}_\mathrm{E}$ est nilpotente, en déduire f^n pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$.

c) Soient (x_n) et (y_n) deux suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} x_{n+1} &= -x_n + y_n \\ y_{n+1} &= -y_n \end{cases}$. Expliciter x_n et y_n en fonction de n, x_0 et y_0.

★ Exercice 14.3

Soit $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y, z, 0)$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^3)$. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b) Vérifier que f est nilpotente. En déduire $\mathrm{id}_\mathrm{E} - f \in \mathrm{GL(E)}$ et expliciter $(\mathrm{id}_\mathrm{E} - f)^{-1}$.

c) Soient $(x_n), (y_n), (z_n)$ trois suites telles que $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} x_{n+1} &= x_n - y_n \\ y_{n+1} &= y_n - z_n \\ z_{n+1} &= z_n \end{cases}$. Expliciter x_n, y_n et z_n en fonction de n et des premiers termes x_0, y_0, z_0.

★ **Exercice 14.4**

Soit E l'espace des suites réelles, on note $\mathrm{F} = \{u \in \mathrm{E} \ / \ \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + 2u_n\}$. Pour $u \in \mathrm{F}$, on pose $\mathrm{D}(u)$ la suite définie par $\mathrm{D}(u)_n = u_{n+1}$.

a) Montrer que F est un s.e.v de E, que $\mathrm{D} \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$ et que $(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} + \mathrm{id_F}) \circ (\mathrm{D} - 2\mathrm{id_F}) = 0$.

b) Soit $\mathrm{H} = \ker(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} + \mathrm{id_F})$ et $\mathrm{G} = \ker(\mathrm{D} - 2\mathrm{id_F})$.

i) Soit $u \in \mathrm{F}$, montrer que $(\mathrm{D}^2 + \mathrm{D} + \mathrm{id_F})(u) \in \mathrm{G}$ et que $(\mathrm{D} - 2\mathrm{id_F})(u) \in \mathrm{H}$.

ii) Montrer que la somme H + G est directe. Montrer que H est un plan vectoriel et que G une droite vectorielle.

iii) Trouver trois réels a, b, c tels : $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)} = \dfrac{a}{\mathrm{X}-2} + \dfrac{b\mathrm{X}+c}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1}$.

iv) En déduire deux polynômes U et V tels que $1 = \mathrm{U} \times (\mathrm{X}-2) + \mathrm{V} \times (\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)$.

c) Déduire de ce qui précède que G et H sont supplémentaires dans F, et donner toutes les suites (u_n) éléments de F.

★ **Exercice 14.5**

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que f est une homothétie ssi : $\forall\ \overrightarrow{x} \in \mathrm{E}, f(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Vect}[\overrightarrow{x}]$.

★ **Exercice 14.6**

Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$:

a) Montrer que $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(v) \iff v \circ u = 0$.

★ **Exercice 14.7**

Soient F et G deux s.e.v supplémentaires dans E. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{F})$ et $v \in \mathscr{L}(\mathrm{G})$, montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que : $\forall\ x \in \mathrm{F}, f(x) = u(x)$ et $\forall\ x \in \mathrm{G}, f(x) = v(x)$.

★ **Exercice 14.8**

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, montrer que :

a) $\ker(f) = \ker(f^2) \iff$ la somme $\ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ est directe.

b) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$.

c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ soient supplémentaires dans E. Donner un exemple pour f qui vérifie cette condition, mais qui ne soit pas un projecteur.

★ **Exercice 14.9**

Soient $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, montrer que $\begin{cases} u \circ v = u \\ v \circ u = v \end{cases}$ ssi u et v sont deux projecteurs de même noyau.

★ **Exercice 14.10**

Soient $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un projecteur, et soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que u et p commutent ssi $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.

★ **Exercice 14.11**

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}^3$, $\mathrm{F} = \{(x, y, z) \in \mathrm{E} \ / \ z = 0\}$, et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}[(1,1,1)]$. Montrer que F et G sont supplémentaires. Déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G, puis celle de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

★ **Exercice 14.12**

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, on peut donc considérer $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{Q}$-e.v.

b) Soit $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ un morphisme de corps. Montrer que σ est $\mathbb{Q}$-linéaire. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P, montrer que $\sigma(\alpha)$ est également racine de P.

c) Exemple : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \ / \ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Vérifier que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, et déterminer tous les morphismes de corps de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.